

**Thème : Les suites**  
**Utilisation des suites pour la recherche de solutions**  
**approchées d'une équation numérique.**

### 1. L'exercice proposé au candidat

Le but de l'exercice est de montrer que l'équation :  $x^6 - 2x + 1 = 0$  (1)  
a une racine réelle et une seule dans  $]0, 1[$  et de calculer une valeur approchée de cette racine.

- 1) Soit  $g$  l'application de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  définie par  $g(x) = x^6 - 2x + 1$ . Calculer  $g(0)$ ,  $g(1)$ ,  $g(\frac{1}{2})$  et  $g(\frac{3}{4})$ . En déduire que l'équation (1) a une solution  $\alpha$  comprise entre  $\frac{1}{2}$  et  $\frac{3}{4}$ .
- 2) En étudiant la fonction  $g$  montrer que  $\alpha$  et 1 sont les seules solutions réelles de l'équation (1).
- 3) Soit  $f : [0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction définie par  $f(x) = \frac{x^6 + 1}{2}$ . Montrer que cette fonction est croissante et vérifie  $\frac{1}{2} \leq f(x) \leq x$  pour  $\alpha \leq x \leq 1$ .
- 4) On définit une suite réelle  $(u_n)$  en prenant  $u_0 \in ]\alpha, 1[$  et en posant  $u_{n+1} = f(u_n)$  pour  $n \geq 0$ .  
Montrer que la suite  $(u_n)$  est décroissante et minorée par  $\alpha$ .  
Montrer que la suite  $(u_n)$  est convergente et donner sa limite.
- 5) Montrer que :  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - \alpha \leq (3u_0^5)^n (u_0 - \alpha) < (3u_0^5)^n (u_0 - \frac{1}{2})$ .
- 6) En prenant  $u_0 = \frac{3}{4}$ , à partir de quelle valeur de  $n$  est-on sûr d'obtenir  $|u_n - \alpha| < 10^{-4}$  ?
- 7) Donner, à l'aide d'une calculatrice programmable, une valeur approchée de  $\alpha$  avec une erreur inférieure à  $10^{-3}$ .

### 2. Le travail demandé au candidat

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice.  
Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le jury.

*Pendant sa préparation, le candidat traitera les questions suivantes :*

- Q.1) Comment savoir, sans connaître  $\alpha$ , si  $u_0$  est supérieur à  $\alpha$  ?
- Q.2) Etudier l'influence du choix de  $u_0$  sur la réponse à la question 6) (on pourra examiner les cas  $u_0 = \frac{3}{5}$ ,  $u_0 = \frac{5}{8}$ ,  $u_0 = \frac{9}{16}$ ,  $u_0 = \frac{17}{32}$ ).
- Q.3) La discussion sur le choix de  $u_0$  suggère une autre méthode d'approche de  $\alpha$  par une suite.  
Proposer les modifications à apporter à l'exercice donné pour employer cette seconde méthode.

*Sur ses fiches, le candidat rédigera et présentera :*

- Sa réponse à la question Q.3)
- Un ou deux énoncés d'exercices sur le thème "Utilisation des suites pour la recherche de solutions approchées d'une équation numérique".