

Thème : Les suites
Utilisation des suites pour la recherche de solutions
approchées d'une équation numérique.

1. L'exercice proposé au candidat

Le but de l'exercice est de montrer que l'équation : $x^6 - 2x + 1 = 0$ (1)
a une racine réelle et une seule dans $]0, 1[$ et de calculer une valeur approchée de cette racine.

- 1) Soit g l'application de \mathbb{R} dans \mathbb{R} définie par $g(x) = x^6 - 2x + 1$. Calculer $g(0)$, $g(1)$, $g(\frac{1}{2})$ et $g(\frac{3}{4})$. En déduire que l'équation (1) a une solution α comprise entre $\frac{1}{2}$ et $\frac{3}{4}$.
- 2) En étudiant la fonction g montrer que α et 1 sont les seules solutions réelles de l'équation (1).
- 3) Soit $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \frac{x^6 + 1}{2}$. Montrer que cette fonction est croissante et vérifie $\frac{1}{2} \leq f(x) \leq x$ pour $\alpha \leq x \leq 1$.
- 4) On définit une suite réelle (u_n) en prenant $u_0 \in]\alpha, 1[$ et en posant $u_{n+1} = f(u_n)$ pour $n \geq 0$.
Montrer que la suite (u_n) est décroissante et minorée par α .
Montrer que la suite (u_n) est convergente et donner sa limite.
- 5) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - \alpha \leq (3u_0^5)^n (u_0 - \alpha) < (3u_0^5)^n (u_0 - \frac{1}{2})$.
- 6) En prenant $u_0 = \frac{3}{4}$, à partir de quelle valeur de n est-on sûr d'obtenir $|u_n - \alpha| < 10^{-4}$?
- 7) Donner, à l'aide d'une calculatrice programmable, une valeur approchée de α avec une erreur inférieure à 10^{-3} .

2. Le travail demandé au candidat

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le jury.

Pendant sa préparation, le candidat traitera les questions suivantes :

- Q.1) Comment savoir, sans connaître α , si u_0 est supérieur à α ?
- Q.2) Etudier l'influence du choix de u_0 sur la réponse à la question 6) (on pourra examiner les cas $u_0 = \frac{3}{5}, u_0 = \frac{5}{8}, u_0 = \frac{9}{16}, u_0 = \frac{17}{32}$).
- Q.3) La discussion sur le choix de u_0 suggère une autre méthode d'approche de α par une suite. Proposer les modifications à apporter à l'exercice donné pour employer cette seconde méthode.

Sur ses fiches, le candidat rédigera et présentera :

- Sa réponse à la question Q.3)
- Un ou deux énoncés d'exercices sur le thème "Utilisation des suites pour la recherche de solutions approchées d'une équation numérique".