Thème : Approximation d'un nombre réel à l'aide de suites.

1. L'exercice proposé au candidat

On se propose de donner un sens à l'écriture du nombre $A = 38{,}63636363\ldots$, puis, à l'aide d'un tableur, de retrouver le développement décimal d'un rationnel.

On considère, pour $n \geqslant 1$, la suite numérique de terme général $u_n = 38{,}63\,63\ldots63$ (avec n périodes dans la partie décimale) et on pose $u_0 = 38$.

1. En écrivant u_n sous la forme $u_n = 38 + 63 \cdot 10^{-2} + 63 \cdot 10^{-4} + \cdots + 63 \cdot 10^{-2n}$, démontrer que cette suite est convergente, déterminer sa limite et l'écrire sous forme de fraction irréductible.
   Quel sens peut-on donner à l'écriture du nombre $A = 38{,}63636363\ldots$?
2. Présenter un algorithme simple permettant de retrouver, à l'aide d'un tableur, l'écriture décimale illimitée du nombre rationnel précédent.

2. Le travail demandé au candidat

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le jury.

Pendant sa préparation, le candidat traitera les questions suivantes :

$Q.1$) Préciser les propriétés utilisées dans la résolution de la première question de cet exercice.

$Q.2$) Écrire l'algorithme demandé à la question 2).

$Q.3$) Montrer que toute écriture décimale illimitée périodique à partir d'un certain rang représente un nombre rationnel.

Sur ses fiches, le candidat rédigera et présentera :

i) Sa réponse à la question $Q.2$).

ii) Des exercices sur le thème « **Approximation d'un nombre réel à l'aide de suites** ».

3. Quelques références aux programmes

Classe de Terminale L, enseignement de spécialité

Contenus	Modalités de mise en œuvre	Commentaires
Compléments sur les suites arithmétiques et géométriques		
Sommes des termes successifs d'une suite arithmétique. Sommes des termes successifs d'une suite géométrique	Privilégier la mise en œuvre d'une méthode plutôt que l'application d'une formule.	Disposer de la somme des premiers termes d'une suite géométrique permettra ensuite d'associer à certains décimaux un quotient d'entiers.
Limite d'une suite géométrique de raison positive et conséquences pour la somme des termes consécutifs d'une telle suite.	Les élèves doivent connaître le comportement, suivant les valeurs de q, de q^n lorsque n tend vers l'infini.	Pour aborder cette notion, la démarche expérimentale abordée dans les programmes de première est à conserver : les potentialités d'un tableur (tableau de valeurs, nuage de points) sont à exploiter. Les notions de suite tendant vers l'infini ou de suite convergente ne sont pas à définir de façon formelle.
	Les élèves doivent pouvoir déduire le comportement lorsque n tend vers l'infini d'une expression de la forme $k\dfrac{1-q^n}{1-q}$	Aucune difficulté théorique à propos des opérations sur les limites ne sera soulevée à ce propos. Le comportement lorsque n tend vers l'infini de la somme des n premiers termes de certaines suites géométriques est un exemple de suites croissantes ne tendant pas vers l'infini. C'est une occasion d'évoquer les aspects historique et philosophique de ces questions en présentant quelques paradoxes classiques.
Écriture décimale des nombres réels		
Écriture décimale d'un quotient d'entiers. Caractérisation d'un nombre rationnel.	Les élèves doivent être capables, *sur des exemples*, de : – déterminer l'écriture décimale périodique d'un quotient d'entiers ; – reconnaître un nombre dont la partie décimale est périodique à partir d'un certain rang comme quotient d'entiers.	Les irrationnels apparaissent ici comme des nombres dont le développement décimal illimité n'est pas périodique.

Classe de Première scientifique

Contenus	Modalités de mise en œuvre	Commentaires
Suites Modes de générations d'une suite numérique. Suite croissante, suite décroissante. Suites arithmétiques et suites géométriques.	Étude de l'évolution de phénomènes discrets amenant à une relation de récurrence. Calcul des termes d'une suite sur calculatrice ou tableur ; observation des vitesses de croissance (resp. de décroissance) pour des suites arithmétiques et des suites géométriques. Comparaison des valeurs des premiers termes des suites $(1+t)^n$ et $1+nt$ pour différentes valeurs de t (en lien avec la notion de dérivée). On pourra étudier numériquement, sur ordinateur ou calculatrice, le temps de doublement d'un capital placé à taux d'intérêt constant, la période de désintégration d'une substance radioactive, etc.	On veillera à faire réaliser sur calculatrice des programmes où interviennent boucle et test.
Notion intuitive de limite infinie perçue à partir d'exemples. Définition de la convergence d'une suite, utilisation de cette définition. Limite d'une suite géométrique.	On utilisera au choix une des définitions suivantes pour la convergence d'une suite vers a : *Tout intervalle ouvert contenant a contient tous les termes de la suite sauf un nombre fini d'entre eux.* *Tout intervalle ouvert contenant a contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.* Démonstration du théorème « des gendarmes » ; les théorèmes sur la somme, le produit et le quotient de suites convergentes seront pour la plupart admis. On pourra mettre la définition en œuvre pour étudier une limite (exemple : suite (w_n) définie par $w_n = max(u_n, v_n)$) ou pour montrer l'unicité de la limite. On montrera avec des exemples la variété de comportement de suites convergeant vers une même limite.	Le travail demandé ici à propos de la définition de la convergence est de nature épistémologique ; il sera présenté aux élèves comme tel et pourra permettre d'amorcer une réflexion, poursuivie en terminale, sur la nature des mathématiques. Toute définition en ε et N est exclue. On indiquera clairement qu'une fois la définition posée et les théorèmes établis, il est en général plus facile d'avoir recours aux théorèmes (ils sont là pour cela) plutôt qu'à la définition, sauf pour les contre-exemples. La définition d'une limite infinie pourra être abordée ou non.

Classe de Terminale scientifique

Contenus	Modalités de mise en œuvre	Commentaires
Suites et récurrence Raisonnement par récurrence Suite monotone, majorée, minorée, bornée.	On choisira des exemples permettant d'introduire le vocabulaire usuel des suites et nécessitant l'utilisation de raisonnements par récurrence. On s'appuiera sur un traitement tant numérique (avec outils de calcul : calculatrice ou ordinateur) que graphique ou algébrique.	On présentera le principe de récurrence comme un axiome.