Dossier 22-2

Thème : Les suites
Approximation d'un nombre réel à l'aide de suites

1. L'exercice proposé au candidat

Une vérification simple montre que $2 \leq \sqrt{7} \leq 3$. On pose $I = [2, 3]$

1) $$\begin{cases} u_{n+1} = u_n - \dfrac{1}{4}(u_n^2 - 7) \\ u_0 \in [2, 3] \end{cases}$$

Conjecturer à l'aide d'une calculatrice le comportement asymptotique de la suite (u_n).

2) Etudier la convergence de la suite (u_n). On pourra notamment introduire la fonction f définie par : $f(x) = x - \dfrac{1}{4}(x^2 - 7)$, montrer que l'intervalle I est stable par f, (c'est à dire que pour tout élément x de I, $f(x)$ est encore un élément de I), puis que :

$$\text{Si } 2 \leq x \leq 3 \text{ et } 2 \leq y \leq 3 \text{ alors } |f(x) - f(y)| \leq \frac{1}{2}|x - y|$$

et utiliser ce résultat pour obtenir une majoration de $\left|u_n - \sqrt{7}\right|$.

3) Montrer que $\sqrt{7}$ est toujours compris entre deux termes consécutifs de la suite.

4) On se fixe une précision ε, $(10^{-6} < \varepsilon < 1)$. A l'aide de la calculatrice, déterminer deux termes consécutifs de la suite (u_n) permettant d'avoir une valeur approchée de $\sqrt{7}$ à la précision ε.

2. Le travail demandé au candidat

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le jury.

Pendant sa préparation, le candidat traitera les questions suivantes :

Q.1) Présenter le travail réalisé sur la calculatrice.

Q.2) Rédiger un énoncé de niveau terminale permettant d'étudier la convergence de la suite (u_n) et de déterminer une valeur approchée de $\sqrt{7}$ à 10^{-2} près.

Sur ses fiches, le candidat rédigera et présentera :

- Sa réponse à la question Q.2)
- Un ou plusieurs exercices permettant de déterminer des valeurs approchées d'un nombre réel à l'aide d'une suite à une précision donnée.

3. Quelques références aux programmes

Programme de 1^eS

Suites		
Modes de générations d'une suite numérique. Suite croissante, suite décroissante. Suites arithmétiques et suites géométriques.	Étude de l'évolution de phénomènes discrets amenant à une relation de récurrence. Calcul des termes d'une suite sur calculatrice ou tableur ; observation des vitesses de croissance (resp. de décroissance) pour des suites arithmétiques et des suites géométriques. [. . .]	On veillera à faire réaliser sur calculatrice des programmes où interviennent boucle et test.
Notion intuitive de limite infinie perçue à partir d'exemples. Définition de la convergence d'une suite, utilisation de cette définition.	On utilisera au choix une des définitions suivantes pour la convergence d'une suite vers a : *Tout intervalle ouvert contenant a contient tous les termes de la suite sauf un nombre fini d'entre eux.* *Tout intervalle ouvert contenant a contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.* Démonstration du théorème "des gendarmes" ; théorèmes sur la somme, le produit et le quotient de suites convergentes seront pour la plupart admis.	Le travail demandé ici à propos de la définition de la convergence est de nature épistémologique ; il sera présenté aux élèves comme tel et pourra permettre d'amorcer une réflexion, poursuivie en terminale, sur la nature des mathématiques. Toute définition en ε et N est exclue. On indiquera clairement qu'une fois la définition posée et les théorèmes établis, il est en général plus facile d'avoir recours aux théorèmes (ils sont là pour ça) plutôt qu'à la définition, sauf pour les contre-exemples.

Programme de Terminale S :

Limites de suites et de fonctions		
Rappel de la définition de la limite d'une suite.	On montrera sur des exemples que l'étude sur calculatrice ou au tableur d'une suite ou d'une fonction permet de conjecturer des limites qui devront ensuite être justifiées.	