

Thème : suites et fonctions

L'exercice

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0; 2]$ par :

$$f(x) = \frac{2x + 1}{x + 1}$$

1) Étudier les variations de f sur l'intervalle $[0; 2]$.

2) Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

2.a) Quelle(s) conjecture(s) peut-on émettre sur la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$?

2.b) Montrer que, pour tout entier n on a $1 \leq u_n \leq 2$.

2.c) Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

2.d) Conclure.

La solution proposée par un élève à la question 2.b)

$$1 \leq u_n \leq 2$$

Initialisation : on vérifie que la propriété est vraie pour $n = 0$.

$u_0 = 2$ or $2 \leq 2$ et même $2 = 2$. La propriété s'initialise.

Hérédité : on suppose que la propriété est vraie pour tout entier $p \geq 0$.

On veut montrer qu'elle est encore vraie au rang $p + 1$ donc

$$1 \leq u_p \leq 2$$

$$2 \leq 2u_p \leq 4$$

$$3 \leq 2u_p + 1 \leq 5 \text{ et } 2 \leq u_p + 1 \leq 3$$

comme les nombres sont positifs, on peut diviser donc

$$1 \leq \frac{3}{2} \leq \frac{2u_p + 1}{u_p + 1} \leq \frac{5}{3} \leq 2$$

Conclusion : la propriété s'initialise pour $n = 0$ et elle est héréditaire, elle est donc vraie pour tout $n \geq 0$.

Le travail à exposer devant le jury

- 1- Quelles sont les connaissances et les compétences mises en oeuvre dans cet exercice ?
- 2- Analysez la production d'élève, en particulier la pertinence de la démarche engagée, la clarté de la rédaction, l'origine des erreurs éventuelles.
- 3- Proposez une correction de la question 2.c) telle que vous l'exposeriez devant une classe de terminale scientifique.
- 4- Présentez deux ou trois exercices faisant intervenir des suites.