Thème : Suites
Étude du comportement de suites définies par une relation de récurrence du type : $u_{n+1} = f(u_n)$

1. L'exercice proposé au candidat

1) On considère la fonction f définie sur $[0, 1]$ par $f(x) = \sqrt{\dfrac{1+x}{2}}$.
   a) Résoudre l'équation $f(x) = x$.
   b) Montrer que pour tout $x \in [0, 1]$, on a $f(x) \geqslant x$.
2) On considère la suite (u_n) définie par la donnée de son premier terme $u_0 \in [0, 1]$ et par la relation $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout entier naturel n. Montrer que la suite (u_n) converge et déterminer sa limite.

2. Le travail demandé au candidat

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le jury.

Pendant sa préparation, le candidat traitera les questions suivantes :

Q.1) Énoncer les théorèmes et les outils mis en jeu dans l'exercice.

Q.2) Rédiger un énoncé détaillé de la question 2) pour des élèves de Terminale scientifique.

Sur ses fiches, le candidat rédigera et présentera :

- Sa réponse à la question **Q.2)**.
- Un ou plusieurs exercices se rapportant au thème « **Suites : Étude du comportement de suites définies par une relation de récurrence du type :** $u_{n+1} = f(u_n)$ ».

3. Quelques références aux programmes

Programme de terminale scientifique

Contenus	Modalités de mise en œuvre	Commentaires
Suites et récurrence		
Raisonnement par récurrence. Suite monotone, majorée, minorée, bornée.	On choisira des exemples permettant d'introduire le vocabulaire usuel des suites et nécessitant l'utilisation de raisonnements par récurrence. On s'appuiera sur un traitement tant numérique (avec outils de calcul : calculatrice ou ordinateur) que graphique ou algébrique. On étudiera numériquement sur un ou deux exemples, la rapidité de convergence d'une suite (u_n) vers sa limite L, en complétant l'étude sur tableur par des encadrements de $(u_n - L)$. On traitera quelques problèmes menant à l'étude de suites $u_{n+1} = au_n + b$.	On présentera le principe de récurrence comme un axiome. Aucune notion théorique de rapidité de convergence n'est au programme.
Suites adjacentes et théorème des suites adjacentes.	La notion de suites adjacentes sera introduite en liaison avec le calcul intégral : encadrements d'aires (par exemple aire d'un cercle par la méthode d'Archimède, aire sous une parabole). On montrera le lien avec l'écriture décimale d'un réel.	On fera le lien avec la méthode de dichotomie. L'objectif est d'enrichir la vision des nombres réels et d'indiquer l'importance des suites adjacentes dans le problème de la mesure des grandeurs géométriques ou physiques. L'étude de suites $u_{n+1} = f(u_n)$ pour approcher une solution de l'équation $f(x) = x$ n'est pas un objectif du programme : la dichotomie, le balayage suffisent au niveau de la terminale pour des problèmes nécessitant de telles approximations.
Théorème de convergence des suites croissantes majorées.		L'équivalence avec le théorème des suites adjacentes pourra faire l'objet d'un problème.

Programme de première scientifique

Contenus	Modalités de mise en œuvre	Commentaires
Suites Modes de générations d'une suite numérique. Suite croissante, suite décroissante. Suites arithmétiques et suites géométriques.	Étude de l'évolution de phénomènes discrets amenant à une relation de récurrence. Calcul des termes d'une suite sur calculatrice ou tableur ; observation des vitesses de crois sance (resp. de décroissance) pour des suites arithmétiques et des suites géométriques. Comparaison des valeurs des premiers termes des suites $(1+t)^n$ et $1+nt$ pour différentes valeurs de t (en lien avec la notion de dérivée)...	On veillera à faire réaliser sur calculatrice des programmes où interviennent boucle et test.