

Thème : suites

L'exercice

On définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par :

$$\begin{cases} u_0 = 0, \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n^2 + 1. \end{cases}$$

Étudier la monotonie de cette suite.

Les réponses de trois élèves de terminale scientifique**Élève 1**

Je note $P_n : \ll u_{n+1} \leq u_n \gg (n \in \mathbb{N})$.

Supposons P_n vraie pour tout n . On a donc :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &\leq u_n \\ u_{n+1}^2 &\leq u_n^2 \\ \frac{1}{4}u_{n+1}^2 &\leq \frac{1}{4}u_n^2 \\ \frac{1}{4}u_{n+1}^2 + 1 &\leq \frac{1}{4}u_n^2 + 1 \\ u_{n+2} &\leq u_{n+1} \end{aligned}$$

Donc P_{n+1} est vraie.

Par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \leq u_n$.

La suite est donc décroissante.

Élève 2

Avec un tableur, j'ai affiché les 400 premiers termes de la suite : elle est croissante, on dirait qu'elle a pour limite 2, mais elle n'y va pas très vite !

Élève 3

Sur \mathbb{R}^+ , la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{4}x^2 + 1$ est croissante car sa dérivée est positive.

Comme $u_{n+1} = f(u_n)$, la suite (u_n) est croissante.

Le travail à exposer devant le jury

- 1 - Analysez les productions des élèves selon les trois compétences chercher, raisonner et communiquer.
- 2 - Présentez une correction de cet exercice telle que vous l'exposeriez devant une classe de terminale scientifique.
- 3 - Proposez trois exercices sur le thème *suites* dont l'un au moins fait appel à un algorithme. Vous motiverez vos choix en indiquant les compétences que vous cherchez à développer chez les élèves.