Thème : suites

L'exercice

Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 3u_n - 2n + 3$.

1. Montrer que pour pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant n$.
2. En déduire les variations et la limite de la suite (u_n).
3. Construire un algorithme qui prend en entrée un réel A strictement positif et renvoie le plus petit entier n tel que $u_n > A$.

Les réponses proposées par deux élèves à la question 1

Élève 1

Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant n$.
- *Initialisation :* $u_0 \geqslant 0$ *donc* $\mathcal{P}_0$ *est vraie.*
- *Hérédité : On suppose* $\mathcal{P}_k$ *vraie c'est-à-dire* $u_k \geqslant k$
  Alors $u_{k+1} \geqslant k \Leftrightarrow 3u_k - 2k + 3 \geqslant k \Leftrightarrow 3u_k + 3 \geqslant 3k \Leftrightarrow u_k \geqslant k$
- *Bilan :* $\mathcal{P}_0$ *est vraie, et pour tout* k $\mathcal{P}_k \Rightarrow \mathcal{P}_{k+1}$. *Donc* $\mathcal{P}_n$ *est vraie pour tout* n.

Élève 2

- *Initialisation : La propriété est vraie au rang 0.*
- *Hérédité : On suppose que* $\mathcal{P}_n$, *la propriété :* $u_n \geqslant n$ *est vraie pour tout* n.

On étudie $\mathcal{P}_{n+1}$ *:*
$u_{n+1} = 3u_n - 2n + 3 = 3(u_n + 1) - 2n$
Or $u_n \geqslant n$, *donc* $u_n + 1 > n$, *donc* $3(u_n + 1) > 3n$ *et* $3(u_n + 1) - 2n > n \Leftrightarrow u_{n+1} > n$
u_{n+1} *est strictement supérieur à* n, *donc* $u_{n+1} \geqslant n + 1$.
La propriété est vérifiée au rang n + 1.
- *La propriété est donc héréditaire. De plus elle est initialisée au rang 0, donc* $\mathcal{P}_n$ *est vraie pour tout* n.

Le travail à exposer devant le jury

1- Analysez la production des deux élèves en mettant en évidence les compétences acquises en matière de raisonnement par récurrence.

2- Exposez une correction des questions 2 et 3 de l'exercice telle que vous la présenteriez devant une classe de terminale S.

3- Présentez deux ou trois exercices sur le thème *suites* dont l'un au moins nécessite une modélisation.