Dossier 20-07 *Sujet 2012*

Thème : suites

Un professeur envisage de faire calculer à ses élèves la somme des cubes des n premiers entiers naturels non nuls. Il hésite entre les deux exercices suivants.

Le premier exercice

1) On pose pour tout entier naturel n non nul : $S_n = 1^2 + 2^2 + ... + n^2$.

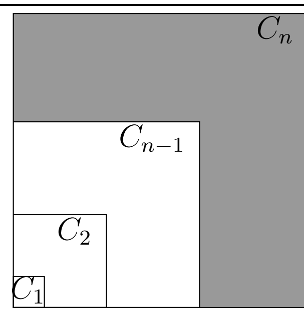
   a) Montrer que pour tout nombre entier i compris entre 1 et n : $(i+1)^3 - i^3 = 3i^2 + 3i + 1$.

   b) Sommer les égalités obtenues pour i compris entre 1 et n. En déduire que $S_n = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

2) On note $Z_n = 1^3 + 2^3 + ... + n^3$. Développer $(i+1)^4 - i^4$. En déduire l'expression de Z_n.

Le deuxième exercice

Pour tout entier naturel non nul n, on note u_n la somme des entiers de 1 à n.
On construit C_1, carré de côté u_1, C_2 carré de côté u_2,..., C_n carré de côté u_n en les emboîtant comme sur la figure ci-contre.



1) *a) Calculer l'aire des carrés C_1, C_2, C_3.*

b) Démontrer que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, l'aire de C_n est égale à $\dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$.

c) En déduire que pour pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, l'aire de la bande grisée délimitée par les carrés C_n et C_{n-1} est égale à n^3.

2) Déterminer une expression simple de la somme des cubes des n premiers entiers.

D'après Hyperbole première S (éditions Nathan)

Le travail à exposer devant le jury

1- Exposez les raisons qui peuvent amener le professeur à choisir l'un ou l'autre des exercices.

2- Démontrez la formule de la somme des cubes, comme vous le feriez devant une classe, en suivant la méthode de votre choix.

3- Présentez deux ou trois exercices sur le thème *suites* dont l'un au moins peut donner lieu à une approche géométrique.