Dossier 20-05 *Sujet 2011*

Thème : suites numériques

L'exercice

1) Montrer que pour tout nombre réel x strictement positif, on a :

$$x - \frac{x^2}{2} < \ell n(x+1) < x$$

2) Pour tout nombre entier naturel n non nul, on considère l'expression :

$$P_n = \frac{n^2+1}{n^2} \times \frac{n^2+2}{n^2} \times \cdots \times \frac{n^2+n}{n^2}$$

a) En utilisant le résultat obtenu à la question 1), démontrer que pour tout nombre entier n non nul on a :

$$\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right) - \frac{(n+1)(2n+1)}{12n^3} < \ell n(P_n) < \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

On admettra que $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

b) Prouvez que la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et préciser sa limite.

La solution proposée par un élève à la question 1)

Pour tout $x > 0$, soit $g(x) = x - \dfrac{x^2}{2}$, $h(x) = \ell n(x+1)$, $f(x) = x$.
Par conjecture, avec la calculette, on a visiblement :

$$g(x) < h(x) < f(x)$$

Déterminons la position de la courbe g par rapport à celle de h :

$$g(x) - h(x) = x - \frac{x^2}{2} - \ell n(x+1)$$

J'ai beau chercher, je n'arrive pas à démontrer que cette expression est négative, nous allons donc l'admettre.
Soit $x > 0$, $x + 1 < e^x$ car e^x croît plus vite que x.
donc $\ell n(x+1) < \ell n(e^x)$ c'est à dire $\ell n(x+1) < x$.

Le travail à exposer devant le jury

1- Quelles sont les connaissances et compétences mises en jeu dans cet exercice ?

2- Analysez la production de l'élève du point de vue de la démarche et du point de vue de la rédaction.

3- Exposez une correction de la question 2)b) comme vous le feriez devant une classe de terminale scientifique.

4- Présentez deux ou trois exercices conduisant à l'étude de suites numériques par diverses méthodes.