

Thème : Étude de suites

1. L'exercice proposé au candidat

Soit $(u_n)_{n \geq 1}$ la suite définie par :

$$u_n = \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{k}{n^2}\right) = \left(1 + \frac{1}{n^2}\right) \times \left(1 + \frac{2}{n^2}\right) \times \cdots \times \left(1 + \frac{n}{n^2}\right).$$

On pose, pour tout entier $n \geq 1$: $v_n = \ln(u_n)$.

1) Montrer que, pour tout réel $x \geq 0$, on a :

$$x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x.$$

2) Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$, on a :

$$\sum_{k=1}^n k^2 \leq n^3.$$

3) En déduire que la suite $(v_n)_{n \geq 1}$ converge.

4) Est-ce que la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est convergente ?

2. Le travail demandé au candidat

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le jury.

Le candidat rédigera sur ses fiches :

- ◇ sa réponse à la question 3) ;
- ◇ un ou plusieurs exercices sur les suites dont un au moins fera intervenir une illustration graphique.

Le candidat présentera au jury :

- le contenu de ses fiches ;
- les méthodes et les savoirs mis en jeu ainsi que les objectifs d'apprentissage visés dans cet exercice.

3. Quelques références aux programmes

Programme de Première S

Contenus	Modalités de mise en œuvre	Commentaires
<p>Suites Modes de générations d'une suite numérique. Suite croissante, suite décroissante. Suites arithmétiques et suites géométriques.</p>	<p>Étude de l'évolution de phénomènes discrets amenant à une relation de récurrence. Calcul des termes d'une suite sur calculatrice ou tableur ; observation des vitesses de croissance (resp. de décroissance) pour des suites arithmétiques et des suites géométriques. Comparaison des valeurs des premiers termes des suites $(1 + t)^n$ et $1 + nt$ pour différentes valeurs de t (en lien avec la notion de dérivée). On pourra étudier numériquement, sur ordinateur ou calculatrice, le temps de doublement d'un capital placé à taux d'intérêt constant, la période de désintégration d'une substance radioactive, etc.</p>	<p>On veillera à faire réaliser sur calculatrice des programmes où interviennent boucle et test.</p>

Programme de Terminale S

Contenus	Modalités de mise en œuvre	Commentaires
<p>Raisonnement par récurrence Suite monotone, majorée, minorée, bornée.</p> <p>Suites Modes de générations d'une suite numérique. Suite croissante, suite décroissante.</p>	<p>On choisira des exemples permettant d'introduire le vocabulaire usuel des suites et nécessitant l'utilisation de raisonnements par récurrence. On s'appuiera sur un traitement tant numérique (avec outils de calcul : calculatrice ou ordinateur) que graphique ou algébrique.</p> <p>On étudiera numériquement sur un ou deux exemples, la rapidité de convergence d'une suite (u_n) vers sa limite L, en complétant l'étude sur tableur par des encadrements de $(u_n - L)$. On traitera quelques problèmes menant à l'étude de suites définies par $u_{n+1} = au_n + b$.</p>	<p>On présentera le principe de récurrence comme un axiome.</p> <p>Aucune notion théorique de rapidité de convergence n'est au programme.</p>