

## Dossier 9-3

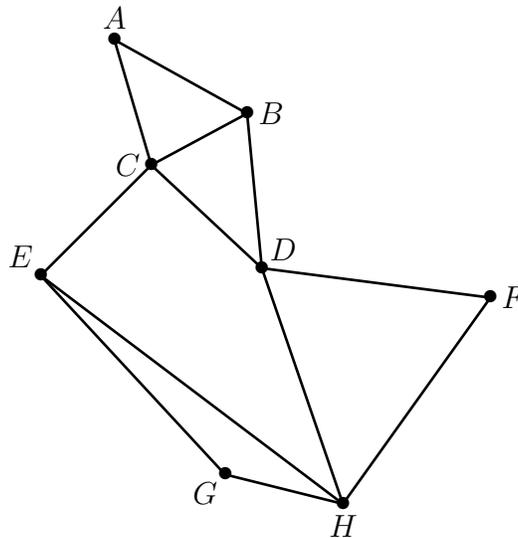
### Thème : Théorie des graphes

#### L'exercice

*D'après Bac ES, Pondichery, Avril 2011.*

Un orchestre doit effectuer une tournée passant par les villes A, B, C, D, E, F, G et H, en utilisant le réseau autoroutier.

Le graphe  $\Gamma$  ci-dessous représente les différentes villes de la tournée et les autoroutes reliant ces villes (une ville est représentée par un point, une autoroute par une arête) :



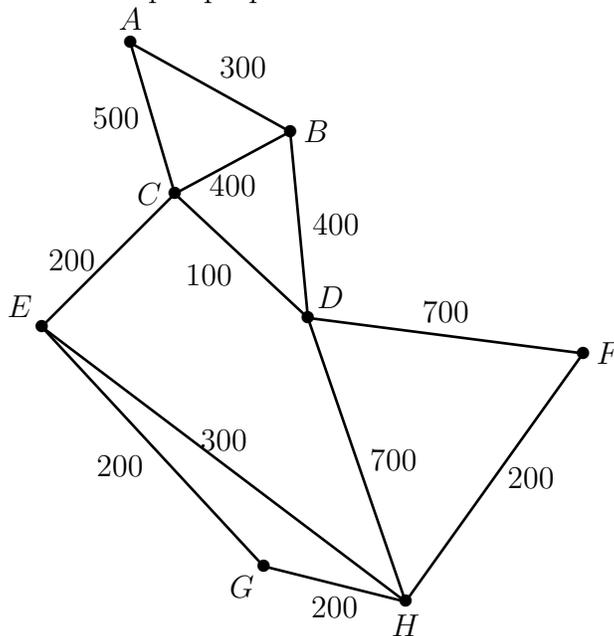
1. Est-il possible d'organiser la tournée en passant au moins une fois par chaque ville, tout en empruntant une fois et une seule chaque tronçon d'autoroute? (la réponse sera justifiée).  
Si oui citer un trajet de ce type.
2. On appelle  $M$  la matrice associée au graphe  $\Gamma$  (les sommets étant pris dans l'ordre alphabétique). On donne la matrice  $M^3$  :

$$M^3 = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 & 2 & 1 & 2 & 1 & 3 \\ 5 & 4 & 6 & 7 & 3 & 2 & 2 & 3 \\ 6 & 6 & 4 & 9 & 7 & 3 & 2 & 3 \\ 2 & 7 & 9 & 4 & 3 & 5 & 3 & 8 \\ 1 & 3 & 7 & 3 & 2 & 3 & 4 & 7 \\ 2 & 2 & 3 & 5 & 3 & 2 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 2 & 3 & 4 & 2 & 2 & 5 \\ 3 & 3 & 3 & 8 & 7 & 5 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

Combien existe-t-il de chemins de longueur 3 reliant B à H? (la réponse devra être justifiée).  
Préciser ces chemins.

3. Des contraintes de calendrier imposent en fait d'organiser un concert dans la ville F immédiatement après un concert dans la ville A.

Le graphe  $\Gamma$  est complété ci-dessous par les longueurs en kilomètres de chaque tronçon (les longueurs des segments ne sont pas proportionnelles aux distances).



Déterminer, en utilisant un algorithme dont on citera le nom, le trajet autoroutier le plus court (en kilomètres) pour aller de A à F.

Préciser la longueur en kilomètres de ce trajet.

### Le travail à exposer devant le jury

- 1- Quels sont les connaissances et les compétences mises en jeu dans cet exercice ?
- 2- Comment expliquer à des élèves l'interprétation des termes de la matrice  $M^n$  ?
- 3- Proposer un ou deux énoncés d'exercices mettant en jeu d'autres compétences sur les graphes.