

Thème : conjecture et démonstration
--

L'exercice

Imaginons qu'une calculatrice comporte une nouvelle touche, nommée \otimes , qui double le nombre saisi puis retranche 1. J'entre un nombre x et j'appuie n fois sur cette touche \otimes .

1. En fonction de x et n , conjecturer l'expression obtenue après avoir appuyé n fois sur la touche \otimes .
2. Démontrer votre conjecture.

La réponse de deux élèves de terminale scientifique**Élève 1**

1. Je trouve $2x - 1$ après avoir appuyé 1 fois sur \otimes , $4x - 1$ après avoir appuyé 2 fois sur \otimes , $8x - 1$ après avoir appuyé 3 fois sur \otimes .

Je conjecture qu'après avoir appuyé n fois sur la touche \otimes on obtient $2^n x - 1$.

2. Pour $n = 1$ on a $2^n x - 1 = 2x - 1$, et si on part de $2^n x - 1$ alors en appuyant encore une fois sur la touche \otimes on obtient $2 \times 2^n x - 1$ donc $2^{n+1} x - 1$. Ce qui permet d'établir la conjecture.

Élève 2

1. Je note r_n le résultat obtenu après avoir appuyé n fois sur la touche \otimes .

Je pars de $r_1 = x$, donc après avoir appuyé 1 fois sur \otimes j'obtiens $r_2 = 2x - 1$.

Puis $r_3 = 2r_2 - 1$ donc $r_3 = 2^2 x - 2 - 1$.

Puis $r_4 = 2r_3 - 1$ donc $r_4 = 2^3 x - 2^2 - 2 - 1$.

On peut conjecturer que : $r_n = 2^{n-1} x - 2^{n-2} - 2^{n-3} - \dots - 2 - 1$.

2. Je vais démontrer par récurrence la conjecture ci-dessus.

Pour $n = 2$ la formule conjecturée donne : $r_2 = 2x - 1$ donc la propriété est vraie au rang 2.

Supposons la vraie pour tout entier n fixé, on a alors $r_{n+1} = 2r_n - 1$

donc $r_{n+1} = 2(2^{n-1} x - 2^{n-2} - 2^{n-3} - \dots - 2 - 1) - 1$ donc $r_{n+1} = 2^n x - 2^{n-1} - 2^{n-2} - \dots - 2 - 1$.

Donc la propriété est héréditaire.

Le principe de récurrence permet alors de dire que la propriété est vraie pour tout n de \mathbb{N}^* .

Le travail à exposer devant le jury

- 1 - Analysez les productions de ces deux élèves en mettant en évidence leurs réussites et leurs erreurs éventuelles. Vous préciserez les aides que vous pourriez leur apporter.
- 2 - Présentez une correction de l'exercice telle que vous l'exposeriez devant une classe de terminale scientifique.
- 3 - Proposez deux exercices sur le thème *conjecture et démonstration* (un au niveau collège et un au niveau lycée) permettant de développer la compétence « communiquer ».