

Thème : conjecture et démonstration

L'exercice

Pour tout réel m , on considère la fonction f_m définie sur \mathbb{R} par $f_m(x) = 2x^2 + mx + 1$. Conjecturer la nature de l'ensemble des points formé par les sommets des paraboles représentant les fonctions f_m lorsque m parcourt \mathbb{R} , puis vérifier ou infirmer cette conjecture par une démonstration.

Les solutions proposées par deux élèves de première

Élève 1

J'ai tracé la courbe avec un logiciel de géométrie dynamique, activé la trace du sommet S de la parabole \mathcal{P} et je constate que le sommet S décrit une parabole orientée vers le bas, de sommet $(0;1)$ et qui passe par les points de coordonnées $(1;-1)$ et $(-1;-1)$.

J'en déduis que je cherche une parabole $y = ax^2 + bx + c$ avec

$$\begin{cases} 1 &= c \\ -1 &= a + b + c \\ -1 &= a - b + c \end{cases}$$

Après calculs, je trouve que la parabole que décrit S est celle d'équation $y = -2x^2 + 1$.

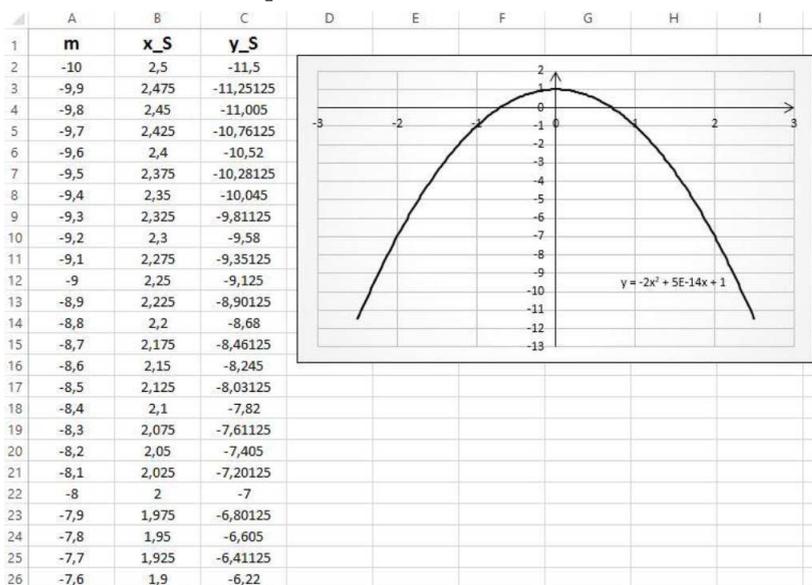
Élève 2

Je sais que le sommet S de la parabole \mathcal{P} est en $-\frac{m}{4}$.

Dans le tableur, j'ai mis en colonne A les valeurs de m entre -10 et 10, en colonne B, j'ai mis les valeurs de x_S et en colonne C, j'ai mis les valeurs de y_S .

Puis, j'ai tracé la courbe de y_S en fonction de x_S .

J'obtiens une parabole comme le montre le graphique.



En demandant au tableur l'équation, il me donne : $y = -2x^2 + 5E - 14x + 1$.

Le travail à exposer devant le jury

- 1- Analysez les compétences mobilisées par chacun des élèves et indiquez les aides qui pourraient leur être apportées.
- 2- En vous appuyant sur l'une ou l'autre des productions d'élèves, présentez une correction de l'exercice comme vous l'exposeriez devant une classe de première.
- 3- En motivant vos choix, proposez deux exercices sur le thème *conjecture et démonstration* dont l'un au moins peut illustrer l'apport d'un logiciel dans sa résolution.