Dossier 5-1

Thème : Systèmes d'équations linéaires

1. L'exercice proposé au candidat

On suppose donné un plan affine réel et choisi un repère de ce plan. Les coordonnées des points écrites entre parenthèses se rapportent à ce repère.

Soient $A_1(a_1, b_1)$, $A_2(a_2, b_2)$, $A_3(a_3, b_3)$ et $A_4(a_4, b_4)$ quatre points du plan. On cherche quatre points $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$, $M_3(x_3, y_3)$ et $M_4(x_4, y_4)$ tels que A_1 soit le milieu du segment M_1M_2, A_2 le milieu du segment M_2M_3, A_3 le milieu du segment M_3M_4 et A_4 le milieu du segment M_4M_1.

1. Mettre ce problème en équations
2. Trouver une condition portant sur a_1, a_2, a_3 et a_4 pour que le système d'équations

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} x_1 & + & x_2 & & & & & = & 2a_1 \\ & & x_2 & + & x_3 & & & = & 2a_2 \\ & & & & x_3 & + & x_4 & = & 2a_3 \\ x_1 & & & & & + & x_4 & = & 2a_4 \end{array}\right.$$

   ait une solution. Lorsqu'elle existe la solution est-elle unique ? Cette condition est-elle suffisante pour résoudre le problème gééométrique ?
3. Traduire géométriquement les conditions trouvées.
4. Montrer que les quadrilatères $M_1M_2M_3M_4$ et $A_1A_2A_3A_4$ ont le même isobarycentre que l'on précisera.

2. Le travail demandé au candidat

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le jury.

Aprés avoir résolu et analysé cet exercice

1. Les points $A_1(a_1, b_1)$, $A_2(a_2, b_2)$, $A_3(a_3, b_3)$ et $A_4(a_4, b_4)$ risquent de paraître trop abstraits à des lycéens. Que faire pour y remèdier ? Proposer dans ce but une modification de l'exercice qui permette cependant de cerner tous les aspects du problème.
2. La mise en équation donne deux systèmes d'équations ayant le même premier membre, l'un pour les abcisses, l'autre pour les ordonnées. Comment peut-on se ramenerà un seul système ? A partir de quel classe est-ce possible ?
3. Le problème est il différent si, au lieu du plan on se place dans un espace affine de dimension 3 (ou plus) ? Pourquoi ? Qu'est ce qui permet d'affirmer que, si le système a une solution, les quatre points $A_1(a_1, b_1)$, $A_2(a_2, b_2)$, $A_3(a_3, b_3)$ et $A_4(a_4, b_4)$ sont coplanaires ? Les points M_1, M_2, M_3 et M_4 trouvés sont-ils forcément coplanaires ?
4. Donner une formulation entièrement géométrique de l'exercice.
5. Rédiger le même exercice avec seulement trois points dont on cherche à en faire les milieux des cotés d'un triangle. Que devient la condition trouvée et la solution ?
6. Peut-on généraliser ces résultats ? Formuler le même exercice avec des systèmes de quatre et de cinq points.