

Thème : Arithmétique

1. L'exercice proposé au candidat

Les nombres 1, 11, 111, 1111, etc. sont des nombres que l'on appelle *rep-units* (répétition de l'unité). Ils ne s'écrivent qu'avec des chiffres 1. Ces nombres possèdent de nombreuses propriétés qui passionnent les mathématiciens. Cet exercice propose d'en découvrir quelques-unes.

Pour tout entier k strictement positif, on note N_k le rep-unit qui s'écrit avec k chiffres 1.

- 1) Citer, en justifiant la réponse, deux nombres premiers inférieurs à 10 n'apparaissant jamais dans la décomposition d'un rep-unit en produit de facteurs premiers.
- 2) À quelle condition sur k , le nombre 3 apparaît-il dans la décomposition en produit de facteurs premiers du rep-unit N_k ?
- 3) Pour tout entier k strictement positif, on a :

$$N_k = \sum_{i=0}^{k-1} 10^i = 1 + 10 + 10^2 + \dots + 10^{k-1}.$$

Justifier l'égalité : $9N_k = 10^k - 1$.

- 4) a) Soit k un entier strictement positif, montrer que $10^k \equiv 1 \pmod{7}$ si et seulement si k est multiple de 6.
- b) En déduire que 7 divise N_k si et seulement si k est multiple de 6.

2. Le travail demandé au candidat

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le jury.

Le candidat rédigera sur ses fiches :

- ◇ sa réponse à la question 4) ;
- ◇ un ou plusieurs exercices se rapportant au thème « **Arithmétique** ».

Le candidat présentera au jury :

- ◇ le contenu de ses fiches ;
- ◇ les méthodes et les savoirs mis en jeu dans l'exercice.

3. Quelques références aux programmes

Classe de Terminale S, enseignement de spécialité

L'arithmétique est un champ des mathématiques très vivant dont les applications récentes sont nombreuses; c'est un domaine au matériau élémentaire et accessible conduisant à des raisonnements intéressants et formateurs. C'est un lieu naturel de sensibilisation à l'algorithmique où la nécessité d'être précis impose rigueur et clarté du raisonnement.

Contenus	Modalités de mise en œuvre	Commentaires
<p>Arithmétique</p> <p>Divisibilité dans \mathbb{Z}. Division euclidienne. Algorithme d'Euclide pour le calcul du PGCD.</p> <p>Congruences dans \mathbb{Z}. Entiers premiers entre eux.</p> <p>Nombres premiers. Existence et unicité de la décomposition en produit de facteurs premiers. PPCM.</p> <p>Théorème de Bézout. Théorème de Gauss.</p>	<p>On fera la synthèse des connaissances acquises dans ce domaine au collège et en classe de Seconde. On étudiera quelques algorithmes simples et on les mettra en œuvre sur calculatrice ou tableur : recherche d'un PGCD, décomposition d'un entier en facteurs premiers, reconnaissance de la primalité d'un entier.</p> <p>On démontrera que l'ensemble des nombres premiers est infini.</p> <p>Sur des exemples simples, obtention et utilisation de critères de divisibilité. Exemples simples d'équations diophantiennes. Applications élémentaires au codage et à la cryptographie. Application : petit théorème de Fermat.</p>	<p>On montrera l'efficacité du langage des congruences. On utilisera les notations : $a \equiv b \pmod{n}$ ou $a \equiv b \pmod{n}$ et on établira les compatibilités avec l'addition et la multiplication. Toute introduction de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est exclue.</p> <p>L'unicité de la décomposition en facteurs premiers pourra être admise.</p> <p>L'arithmétique est un domaine avec lequel l'informatique interagit fortement ; on veillera à équilibrer l'usage de divers moyens de calculs : à la main, à l'aide d'un tableur ou d'une calculatrice.</p>