Thème : Arithmétique

L'exercice

On appelle diviseur propre d'un entier naturel non nul n, tout diviseur de n qui soit positif et distinct de n. Tout entier naturel non nul égal à la somme de ses diviseurs propres est dit nombre parfait.

1) a) Établir les listes des diviseurs de 28 et de 496 et montrer que ce sont deux nombres parfaits.

   b) Vérifier que 28 et 496 sont de la forme $2^n(2^{n+1}-1)$, où $n \in \mathbb{N}^*$, avec $2^{n+1}-1$ premier.

   c) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, si $2^{n+1}-1$ est premier, alors $2^n(2^{n+1}-1)$ est parfait.

   d) Illustrer par un exemple le fait que, si $2^{n+1}-1$ n'est pas premier, alors $2^n(2^{n+1}-1)$ n'est pas parfait.

2) Soit a un nombre pair.

   a) Montrer que l'on peut écrire a sous la forme $2^n b$, où b est un entier impair et $n \in \mathbb{N}^*$.

   b) On note $s(a)$ la somme de tous les diviseurs positifs de a. Montrer que $s(a) = (2^{n+1}-1)s(b)$.

   c) Montrer que a est un nombre parfait si et seulement si $b = (s(b)-b)(2^{n+1}-1)$. En déduire que si a est parfait alors $s(b)-b$ est un diviseur de b, puis que b est premier et égal à $2^{n+1}-1$.

   d) Conclure.

La solution proposée par un élève à la question 2)c)

a est un nombre parfait si $s(a) = 2a$, ce qui donne $(2^{n+1}-1)s(b) = 2 \times 2^n b$, et en développant on trouve : $2^{n+1}s(b) - s(b) = 2^{n+1}b$.
Si on développe l'égalité de l'énoncé : $b = 2^{n+1}s(b) - s(b) - 2^{n+1}b + b$, ce qui est bien ce que j'ai trouvé avant.
Donc, $s(b)-b$ est un diviseur de b, et il est égal à 1, parce que $s(b)-b$ est la somme de tous les diviseurs propres de b. Donc $b = 2^{n+1}-1$.

Le travail à exposer devant le jury

1- Analyser la production de l'élève en mettant en évidence les compétences acquises et l'origine possible de ses éventuelles erreurs.

2- Proposer une correction de la question 1.c) telle que vous l'exposeriez devant une classe de Terminale.

3- Produire un algorithme permettant de déterminer si un nombre est parfait. On implémentera cet algorithme sur le matériel de son choix.

4- Présentez deux ou trois exercices sur le thème *Arithmétique*.