Thème : arithmétique

L'exercice

Soit n un entier naturel, on définit deux entiers a et b par :

$$\begin{cases} a = 4n+1 \\ b = 5n+3 \end{cases}$$

Démontrer que :

PGCD(a; b)=7 si et seulement si $n \equiv 5 \pmod 7$.

Les solutions proposées par trois élèves de terminale scientifique spécialité de mathématiques

Élève 1

Si $n \equiv 5 \pmod{7}$ *alors* $n = 7k+5$.

En remplaçant, $\begin{cases} a = 28k+21 \\ b = 35k+28 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 7(4k+3) \\ b = 7(5k+4) \end{cases}$

Donc 7 divise a et b et puisque $4(5k+4) - 5(4k+3) = 1$, *on en déduit que PGCD(a ; b) = 7.*

Élève 2

Si PGCD(a ;b)=7 alors $4n+1 \equiv 0 \pmod{7}$ *soit* $4n \equiv 6$ *(mod 7).*

Comme $2 \times 4 \equiv 1 \pmod{7}$, $4n \equiv 6 \pmod{7} \Leftrightarrow n \equiv 5 \pmod{7}$.

Élève 3

$4b - 5a = 7$ *donc PGCD(a ; b) est soit égal à 1, soit égal à 7.*

D'après ce tableau de congruences, j'obtiens l'équivalence.

$n \equiv \cdots \pmod 7$	0	1	2	3	4	5	6
$4n+1 \equiv \cdots \pmod 7$	1	5	2	5	3	0	4
$5n+3 \equiv \cdots \pmod 7$	3	1	6	4	2	0	5

Le travail à exposer devant le jury

1- Analyser les productions de ces trois élèves en mettant en évidence leurs réussites et leurs erreurs éventuelles. Vous proposerez des aides adaptées à chacun des élèves.

2- Présentez une correction de l'exercice telle que vous l'exposeriez devant une classe de terminale scientifique spécialité de mathématiques.

3- Proposez deux exercices sur le thème *arithmétique*, un au niveau du collège et un au niveau du lycée. L'un des exercices sera choisi pour modéliser une situation extérieure aux mathématiques.