

Thème : Arithmétique

L'exercice

Pour coder un message à l'aide d'un chiffrement affine, on commence par remplacer chaque lettre de l'alphabet par un nombre entier de 0 à 25, selon le tableau ci-dessous. Les autres signes du texte sont ignorés.

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	...	X	Y	Z
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...	23	24	25

Puis on utilise une fonction affine de chiffrement $f(x) = ax + b$, avec (a, b) un couple d'entiers compris entre 0 et 25.

Enfin, on prend le reste de la division par 26 de $f(x)$ pour obtenir le codage voulu. Pour que $f(x)$ soit une fonction de chiffrement, il faut que les transformations de deux lettres distinctes donnent deux lettres distinctes.

1. Les fonctions affines suivantes peuvent-elles être utilisées comme fonctions de chiffrement ?
 $f : x \mapsto 13x + 3$ $g : x \mapsto 3x + 7$
2. On souhaite choisir comme fonction affine de chiffrement une fonction qui permet de coder C en M et K en A. Montrer que la fonction $h : x \mapsto 5x + 2$ convient et coder "ALLO" à l'aide de cette fonction.
3. On appelle fonction de décodage de la fonction h , la fonction de chiffrement $k : x \mapsto ax + b$ telle que $k[h(x)] \equiv x [26]$, pour tout nombre entier x .
 - a) Montrer que $5a \equiv 1 [26]$ si et seulement si $a \equiv 21 [26]$
 - b) En déduire une fonction de décodage de la fonction h .

La réponse d'un élève

1. J'ai prolongé le tableau fourni dans une feuille de calcul tableur pour représenter les fonctions f et g et j'ai constaté que g était un code mais pas f .

2. C a pour valeur 2, $f(2) = 12$ qui est bien la valeur de M. K a pour valeur 10, $f(10) = 52$ qui est un multiple de 26, donc donne bien A. "ALLO" est codé "CFFU"

3. a) $5 \times 21 = 105 = 4 \times 26 + 1$
 b) je cherche la fonction l de la forme $l(x) = 21x + b$ qui permet de transformer M en C et A en K, puisqu'il me reste une inconnue, je prends A car sa valeur vaut 0, et $l(0) = b = 10$. Je vérifie que ça marche aussi sur M : $l(12) = 262$ qui est congru à 2 modulo 26.

Le travail à exposer devant le jury

- 1- Analysez la réponse de l'élève en mettant en évidence ses réussites et les progrès qu'il doit réaliser.
- 2- Proposez une correction de la question 3 telle que vous la présenteriez devant une classe de terminale S spécialité mathématiques.
- 3- Présentez deux ou trois exercices d'arithmétique au lycée, dont l'un au moins fait appel à des congruences.