Chapitre 1

Le plan euclidien orienté

8 avril 2003
On considère le plan muni d'un repère (O, $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$), orthonormé.

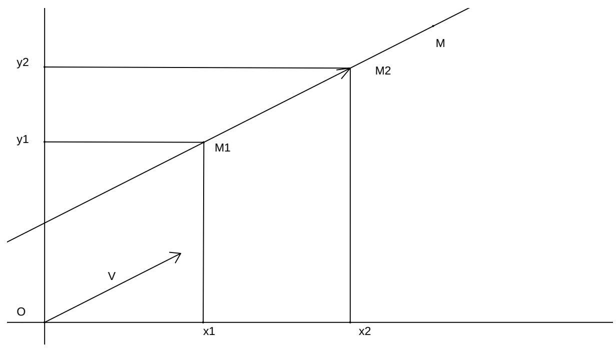
1.1 Vecteurs et angles orientés dans le plan

Un vecteur est défini par une longueur, une direction et un sens.
Soient deux points M_1 et M_2, on peut définir deux vecteurs de même direction (celle de droite (M_1M_2)), de même longueur (celle du segment $[M_1M_2]$) et de sens opposés : le vecteur $\overrightarrow{M_1M_2}$ et le vecteur $\overrightarrow{M_2M_1}$, le premier point nommé est l'origine et le second l'extrémité.
Si les points ont pour coordonnées $M_1 = (x_1, y_1), M_2 = (x_2, y_2)$, on peut décrire le vecteur par ces coordonnées :

$$\overrightarrow{M_1M_2} = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{pmatrix} = \overrightarrow{V}$$

1.1.1 La droite

On a une seule droite passant par M_1 et M_2. Montrons que l'équation générale d'une droite est $ax + by + c = 0$.
Si $M = (x, y)$ est un point de $\mathcal{D}$, le vecteur $\overrightarrow{M_1M}$ est proportionnel à $\overrightarrow{M_1M_2}$.



Si $x_2 \neq x_1$ et $y_2 \neq y_1$, les coordonnées de M vérifient, d'après le théorème de Thalès :

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$$

ce qui se traduit par :

$$(x - x_1)(y_2 - y_1) = (y - y_1)(x_2 - x_1)$$

En développant, on obtient la forme $ax + by + c = 0$:

$$x(y_2 - y_1) - y(x_2 - x_1) - x_1y_2 + x_2y_1 = 0$$

Comme $x_2 \neq x_1$, on peut l'écrire $y = \alpha x + \beta$ avec $\alpha = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ et $\beta = \dfrac{-x_1y_2 + y_1x_2}{x_2 - x_1}$.
α est appelé la pente de la droite $\mathcal{D}$
β est l'ordonnée du point d'intersection de $\mathcal{D}$ avec l'axe des ordonnées.
Si $x_2 = x_1$, alors l'équation de la droite est $x = x_1$, $b = 0$, $a = 1$ et $c = x_1$.
Si $y_2 = y_1$, alors l'équation de la droite est $y = y_1$, $a = \alpha = 0$, la pente est nulle.

1.1.2 Le produit scalaire de deux vecteurs

Comme le repère est orthonormé, on peut définir le produit scalaire de deux vecteurs, $\overrightarrow{V_1} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{V_2} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ par

$$\overrightarrow{V_1}.\overrightarrow{V_2} = x_1x_2 + y_1y_2.$$

On a $\overrightarrow{V_1}.\overrightarrow{V_1} = x_1^2 + y_1^2$, et la longueur ou norme de $\overrightarrow{V_1}$ est

$$||\overrightarrow{V_1}|| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}.$$

On en déduit la longueur du segment $[M_1M_2]$ ou distance entre M_1 et M_2, à l'aide des coordonnées du vecteur $\overrightarrow{M_1M_2}$:

$$M_1M_2 = d(M_1, M_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = ||\overrightarrow{M_1M_2}||$$

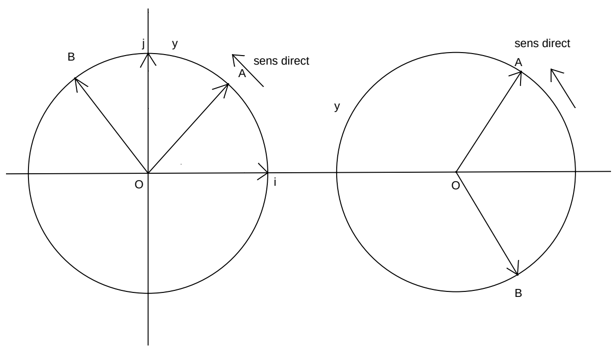
1.1.3 Le cercle trigonométrique

On appelle cercle trigonométrique le cercle de centre O et de rayon 1. On peut le parcourir dans le sens direct (sens giratoire) ou dans le sens indirecte (sens des aiguilles d'une montre).

Définition 1.1.1 *Soient A et B deux points sur ce cercle, si la longueur de l'arc (AB) décrit dans le sens direct est y, une mesure de l'angle orienté des deux vecteurs $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, est*

$$mes(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = y \text{ en radians, } mes(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = x \text{ en degrés,}$$

sachant que le demi-cercle est de longueur π et que l'angle plat mesure 180 degrés.



On a le tableau de proportionnalité suivant :

radians	π	y
degrés	180	x

$x = \dfrac{y \times 180}{\pi}$ ou $y = \dfrac{x \times \pi}{180}$
Cette mesure est comprise entre 0 et 360 degrés ou entre 0 et 2π radians.
On a $mes(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) + mes(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA}) = 360$ degrés ; ainsi $mes(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA}) = 360 - x$ degrés, on a $360 - x > 0$.
On a ainsi deux angles orientés, définis par les mêmes vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ ayant deux mesures différentes entre 0 et 360 degrés, $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ et $(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA})$.
On retrouve l'angle géométrique, partie convexe déterminée par les demi-droites.
On a plusieurs mesures pour un angle : si on fait, à partir de B un nombre entier k de tours de cercle, dans le sens direct, on obtient une autre mesure
$mes(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = x + k \times 360$ en degrés, $mes(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = y + k \times 2\pi$ en radians
Si on tourne dans le sens indirect, on a :
$mes(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = x - k \times 360$ en degrés, $mes(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = y - k \times 2\pi$ en radians
Ainsi, on a une infinité de mesures pour un même angle. Une mesure d'angle est définie à $2k\pi$ près en radians ou à $360k$ degrés près en degrés, où $k \in \mathbb{Z}$. On peut ainsi écrire $mes(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = -\ mes(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA})$.
Ceci permet d'additionner ou soustraire des mesures d'angles avec un résultat qui est encore une mesure d'angles.
On peut choisir de représenter les mesures d'angles par un intervalle de longueur 360 degrés ou 2π radians, on revient à cet intervalle *modulo* 360 ou *modulo* 2π. On choisit selon le problème :

$$]0, 360], \quad]0, 2\pi], \quad]-180, 180], \quad]-\pi, \pi]$$

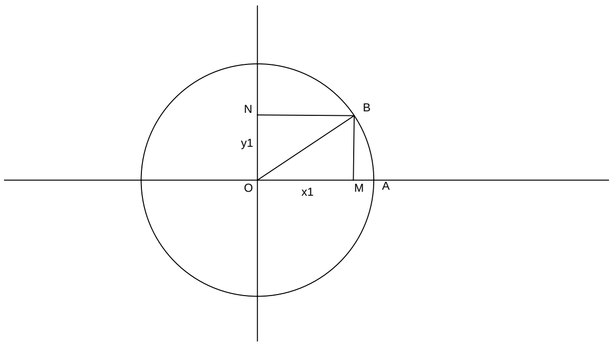
Proposition 1.1.2 *Soient $\overrightarrow{V_1}$ et $\overrightarrow{V_2}$ deux vecteurs. Ils sont orthogonaux si et seulement si*

$$\overrightarrow{V_1}.\overrightarrow{V_2} = x_1x_2 + y_1y_2 = 0.$$

Ceci se déduit du théorème de Pythagore.

Définition 1.1.3 *Pour tout couple de vecteurs $\overrightarrow{V}, \overrightarrow{W}$, on définit l'angle orienté $(\overrightarrow{V}, \overrightarrow{W})$, par l'angle $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$, tels que $\overrightarrow{V} = ||\overrightarrow{V}||\ \overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{W} = ||\overrightarrow{W}||\ \overrightarrow{OB}$.*

Définition 1.1.4 Formes trigonométriques



On considère le cercle trigonométrique, soit A le point tel que $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{i}$. Pour toute mesure d'angle θ, soit B tel que $mes(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = \theta$, on a $\overrightarrow{OB} = (x_1, y_1)$ dans le repère orthonormé, on définit deux fonctions par :

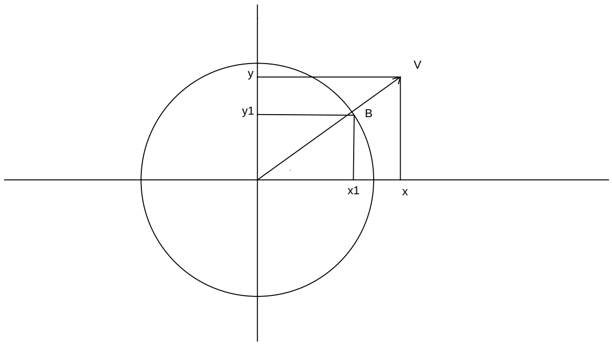
$$\sin\theta = y_1 \quad \cos\theta = x_1$$

Pour retrouver les formes trigonométriques des angles géométriques aigus, on se place dans le triangle rectangle OMB. Si $0 < \theta <= 90$ degrés, on a

$$\sin\theta = \frac{BM}{OB} = BM = y1 \;\; \cos\theta = \frac{OM}{OB} = OM = x_1$$

Proposition 1.1.5 *Soit $\overrightarrow{V}$ un vecteur de coordonnées (x, y), si $\theta = mesure(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{V})$, alors*

$$x = ||\overrightarrow{V}|| \times \cos\theta,\;\; y = ||\overrightarrow{V}|| \times \sin\theta$$



C'est le théorème de Thalès.

Proposition 1.1.6 *Soient $\overrightarrow{V_1}$ et $\overrightarrow{V_2}$ deux vecteurs, alors*

$$\overrightarrow{V_1}.\overrightarrow{V_2} = ||\overrightarrow{V_1}|| \times ||\overrightarrow{V_2}|| \times \cos(\overrightarrow{V_1}, \overrightarrow{V_2}).$$

Démonstration :
Si $\theta_1 = mesure(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{V_1})$ et $\theta_2 = mesure(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{V_2})$, alors

$$\overrightarrow{V_1}.\overrightarrow{V_2} = ||\overrightarrow{V_1}||.||\overrightarrow{V_2}||.\cos\theta_1.\cos\theta_2 + ||\overrightarrow{V_1}||.||\overrightarrow{V_2}||.\sin\theta_1.\sin\theta_2$$

$$\overrightarrow{V_1}.\overrightarrow{V_2} = ||\overrightarrow{V_1}||.||\overrightarrow{V_2}||\cos(\theta_1 - \theta_2)$$

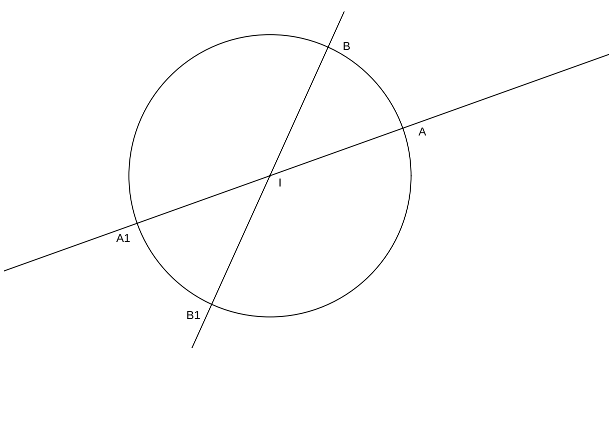
Or, $\theta_1 - \theta_2 = \pm mesure((\overrightarrow{V_1}, \overrightarrow{V_2}))$.

Définition 1.1.7 *Soient deux droites D_1 et D_2 concourantes en I. Un cercle de centre I coupe les droites D_1 en A, A', et D_2 en B, B'. Une mesure de l'angle des deux droites est*

$$mes(D_1, D_2) = mes(\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IB}).$$

Une autre mesure est

$$\begin{aligned} mes(D_1, D_2) &= mes(\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IB_1}) \\ &= mes(\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IB}) + mes(\overrightarrow{IB}, \overrightarrow{IB_1}) \end{aligned}$$



La mesure de l'angle de deux droites est définie à 180 degrés ou π radians près, car les droites ne sont pas orientées contrairement aux vecteurs.
Par contre, on a $mes(D_1, D_2) + mes(D_2, D_1) = 180$ degrés, donc $mes(D_1, D_2) = -\, mes(D_2, D_1)$ à 180 degrés près

1.2 Les transformations du plan

Pourquoi introduire les transformations ?
Pour démontrer les propriétés d'une figure géométrique, on a souvent plusieurs procédures ou démonstrations. On peut

- faire des calculs de longueurs,
- faire des calculs de mesures d'angles,
- démontrer des propriétés géométriques
- comparer à une autre figure

Exemple : pour montrer q'un triangle ABC est rectangle en A, on peut

- calculer $AB^2 + AC^2$ et le comparer à BC^2
- montrer que $\widehat{BAC} = 90$ degrés
- le comparer à un autre triangle rectangle connu.

On rappelle que deux triangles sont isométriques ou superposables, s'ils vérifient l'une des conditions équivalentes suivantes :

- leurs trois côtés ont respectivement la même longueur.
- deux côtés de l'un ont même longueur que deux côtés de l'autre et les angles définis par ces côtés ont même mesure.
- deux angles de l'un ont même mesure que deux angles de l'autre et les côtés communs à ces angles ont même mesure.

On rappelle que deux triangles sont semblables s'ils vérifient l'une des conditions équivalentes suivantes :

- leurs trois angles sont égaux deux à deux, par exemple $\hat{A} = \hat{A}', \hat{B} = \hat{B}', \hat{C} = \hat{C}'$
- leurs côtés sont proportionnels deux à deux.

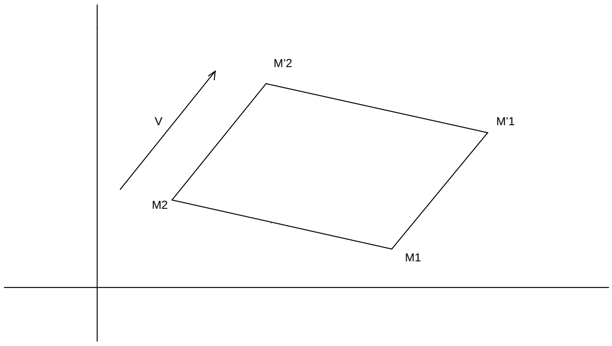
Pour montrer que deux triangles vérifient ces conditions, on peut passer de l'un à l'autre par un procédé géométrique, qui conserve ou agit de façon connue sur les angles ou les côtés. On pourra démontrer des propriétés de l'un ou de l'autre sans faire de calculs numériques.
Ayant deux triangles vérifiant ces conditions, peut-on passer de l'un à l'autre par un procédé géométrique, sans calculer les angles ou les longueurs des côtés ?

1.2.1 Définitions, notations et figures-types associées

Définition 1.2.1 *On appelle <u>transformation du plan</u> une bijection f du plan sur lui-même.*

A tout point M du plan, on associe un point $M' = f(M)$, et f est bijective. Cas particulier, on a l'application identique, notée Id.

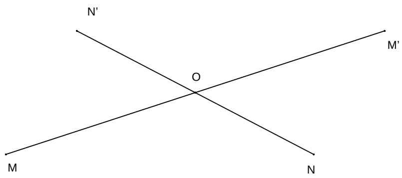
Définition 1.2.2 *On appelle <u>translation de vecteur $\overrightarrow{V}$</u>, l'application $f = t_{\overrightarrow{V}}$ du plan dans lui-même, telle que pour tout point M du plan, si $M' = f(M)$, alors $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{V}$.*



Proposition 1.2.3 *Si M_1 et M_2 sont deux points du plan, M'_1, M'_2 leur image par une translation, alors $M_1M_2M'_2M'_1$ est un parallélogramme. Par une translation l'image d'une droite est une droite parallèle.*

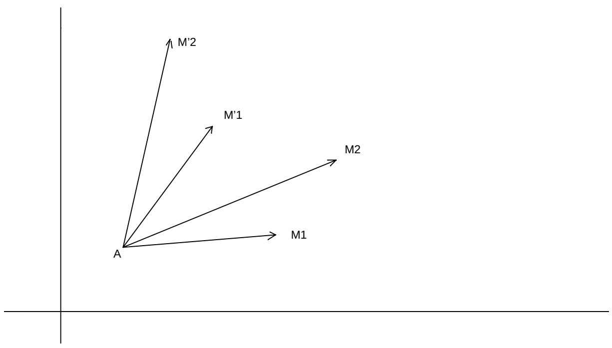
Pour la translation, on a la figure-type du parallélogramme.

Définition 1.2.4 *On appelle symétrie centrale de centre O l'application $f = S_O$ du plan dans lui-même, telle que pour tout point M du plan, si $M' = f(M)$, alors $\overrightarrow{OM'} = -\overrightarrow{OM}$.*



On a aussi, pour tout point M du plan, si $M' = f(M)$, $\overrightarrow{MM'} = 2\overrightarrow{OM}$. Pour la symétrie centrale, on a la figure-type d'une configuration de Thalès particulière.

Définition 1.2.5 *On appelle rotation de centre A et d'angle θ, l'application $f = r(A, \theta)$ du plan dans lui-même, telle que pour tout point M du plan, si $M' = f(M)$, alors mesure$(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AM'}) = \theta, AM = AM'$.*



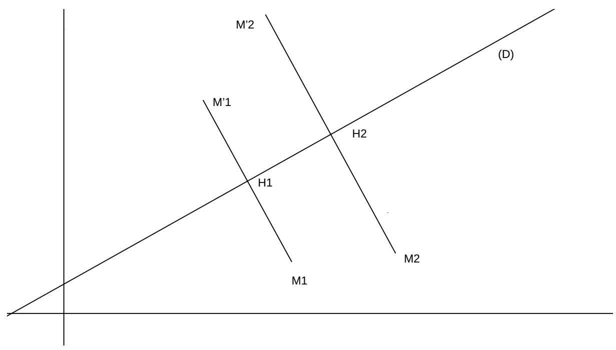
Cas particulier : si la mesure de l'angle est π, on a une symétrie de centre A.

Proposition 1.2.6 *Si M' est l'image de M par une rotation $r(A, \theta)$, alors le triangle $M'AM$ est isocèle en A et $\widehat{M'AM} = \theta$.*

Pour la rotation, on a le triangle isocèle comme figure-type. Selon les valeurs de θ, on peut ainsi reconnaître un triangle rectangle isocèle ($\theta = \frac{\pi}{2}$) ou un triangle équilatéral ($\theta = \frac{\pi}{3}$).

Proposition 1.2.7 *Si M_1' est l'image de M_1 par une rotation $r(A,\theta)$, et M_2' est l'image de M_2 par la même rotation, alors $mes(\overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{M_1'M_2'}) = \theta$. L'image d'une droite (D) est une droite (D') telle que $mes(D, D') = \theta$*

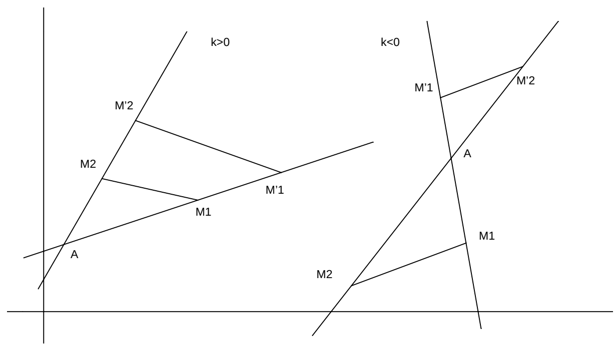
Définition 1.2.8 *On appelle symétrie axiale ou symétrie orthogonale ou réflexion d'axe D, l'application $f = S_D$ du plan dans lui-même, telle que pour tout point M du plan, si H est le projeté orthogonal de M sur D et si $M' = f(M)$, alors $\overrightarrow{MM'} = 2\overrightarrow{HM}$*



Proposition 1.2.9

- *Par une réflexion S_D, les points de (D) sont invariants*
- *Si M' est l'image de M par une réflexion S_D, alors (D) est la médiatrice du segment $[MM']$.*

Définition 1.2.10 *On appelle homothétie de centre A et de rapport k l'application $f = h(A,k)$ du plan dans lui-même, telle que pour tout point M du plan, si $M' = f(M)$, alors $\overrightarrow{AM'} = k \times \overrightarrow{AM}$.*

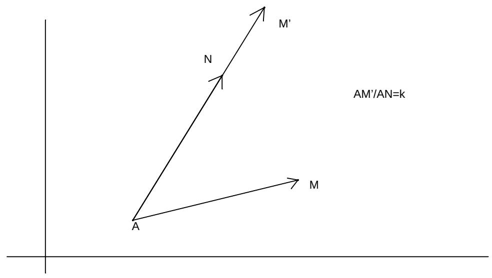


Cas particulier : si la valeur de k est -1, on a une symétrie de centre A.

Proposition 1.2.11 *Par une homothétie l'image d'une droite est une droite parallèle.*

Pour l'homothétie, on a la figure-type des configurations de Thalès.

Définition 1.2.12 *On appelle similitude de centre A, d'angle θ et de rapport k l'application $f = S(A,\theta,k)$ du plan dans lui-même, telle que pour tout point M du plan, si $M' = f(M)$, alors $mesure(\overrightarrow{AM'}, \overrightarrow{AM}) = \theta$ et $AM' = k \times AM$.*



On a $M' = h(A,k)(N)$ et $N = rot(A,\theta)(M)$, d'où une similitude est un composé d'une rotation et d'une homothétie.

$$M' = h(A,k)(\ rot(A,\theta)(M)\ ) = h(A,k)\ o\ rot(A,\theta)\ (M).$$

1.2.2 Effets des transformations sur les configurations

Proposition 1.2.13 Effets de conservation
Si $A' = f(A),\ B' = f(B),\ C' = f(C)$.

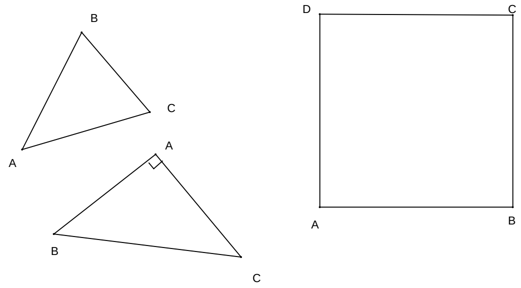
Une transformation conserve	*signifie que*	*translation*	*réflexion*	*rotation*	*homo simili*
les longueurs	$A'B' = AB$	$\times$	$\times$	$\times$	
les angles géométriques	$\widehat{A'B'C'} = \widehat{ABC}$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$
les angles orientés	$(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$	$\times$		$\times$	$\times$
le parallélisme	*les images de deux droites parallèles sont deux droites parallèles*	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$
l'orthogonalité	*les images de deux droites perpendiculaires sont deux droites perpendiculaires*	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$
le contact	*les images de deux lignes tangentes sont tangentes*	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$

Utilisation pratique :

1. Si $\mathcal{F}'$ est l'image d'une figure $\mathcal{F}$, par l'une des transformations ci-dessus, alors elle possède les propriétés de $\mathcal{F}$ conservées par la transformation.

2. Pour une figure $\mathcal{F}$, si certains points se déduisent d'autres par une transformation connue, on peut y reconnaître une figure-type associée.

Exemples :



1. Soient trois points A, B, C, si C est l'image de B par une rotation de centre A, alors le triangle ABC est isocèle en A. Si l'angle est $\pi/2$, alors le triangle est rectangle-isocèle, si l'angle est $\pi/3$ alors le triangle est équilatéral.
2. Soient quatre points A, B, C, D, si A est l'image de C par une rotation de centre B, d'angle $\pi/2$ et si D est l'image de B par une rotation de centre A, d'angle $\pi/2$, alors $ABCD$ est un carré.